جلسه دهم

با توجه به مباحث جلسه‌ی پیش دو رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد:

$$D\,{}^{u}s_{1,2,3} = {}^{u}\dot{s}_{1,2,3} = {}^{u}\omega_{us} \times {}^{u}s_{1,2,3}$$

$$D{}^{u}_{s}C = {}^{u}_{s}\dot{C} = {}^{u}\omega_{us} \times {}^{u}_{s}C$$

همانطور که می‌دانید ${}^{u}\omega_{us}$برداری سه مولفه‌ای است و ${}^{u}_{s}C$ماتریس دورانی با ۹ عنصر است. برای اینکه اشتباهی در ضرب این بردار و ماتریس دوران رخ ندهد، ماتریسی به عنوان ماتریس ضرب خارجی تعریف نموده و آن را Ω می‌نامند. در حقیقت این ماتریسΩرا از روی مولفه‌های ${}^{u}\omega_{us}$طوری ساختند که حاصل ضرب آن در ماتریس${}^{u}_{s}C$ نتیجه‌ی ضرب خارجی ${}^{u}\omega_{us}$ در ماتریس ${}^{u}_{s}C$را بدست دهد. بنابراین:

$$\Omega = [\,{}^{u}\omega_{us} \times]$$

$${}^{u}_{s}\dot{C} = [\,{}^{u}\omega_{us} \times]{}^{u}_{s}C = \Omega{}^{u}_{s}C$$

همانطور که می‌دانید وقتی می‌خواهیم از سرعت برداری صحبت کنیم باید بگوییم از دید کدام دستگاه است.

حال با توجه به مثال چرخ و فلک،می‌خواهیم ارتباط سرعت r_{OA} از دید دستگاه چرخ یا $D_{Ch}(r_{OA})$را با سرعت r_{OA} از دید دستگاه زمین یا $D_e(r_{OA})$ را بدست آوریم. همانطور که می‌دانید این دو سرعت با هم فرق دارند و در همین راستا سرعت دورانی بین چرخ و زمین مطرح شد. همچنین$\omega_{e\,Ch}$،$D_{Ch}(r_{OA})$ و $D_e(r_{OA})$شخصیتی برداری دارند که به جای O و A ربط دارد و می‌توانند با بیان شدن در دستگاه چرخ، زمین یا هر دستگاه دلخواه دیگری ماهیتی عددی پیدا کند.

نکته‌ی حائز اهمیت دیگر این است که$D_e(r_{OA})$ قبل و بعد از مشتق‌گیری ماهیتی برداری دارد ولی$D(\,{}^{e}r_{OA})$ ابتدا ماهیتی عدد داشته و پس از مشتق‌گیری نیز ماهیتی عددی دارد و رابطه‌ی$D(\,{}^{e}r_{OA}) = {}^{e}(D_e(r_{OA}))$ برقرار است. به عنوان مثال اگر${}^{e}r_{OA} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد سرعت این سه عدد $D(\,{}^{e}r_{OA}) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$است.

حال به دنبال یافتن رابطه‌ی$D_e(r_{OA})$ و$D_{Ch}(r_{OA})$ هستیم که مستقل از بیان آن ها در دستگاه چرخ یا زمین یا هر دستگاه دیگری باشد. برای سادگی در مشتق‌گیری ابتدا بردارها را در یک دستگاه بیان می‌کنیم و نهایت بیان‌ها را برداری می‌نماییم.

$$
\begin{gathered}
{}^{e}(D_e(r_{OA})) = D({}^{e}r_{OA}) = D\left({}^{e}_{Ch}C\,{}^{Ch}r_{OA}\right) = D({}^{e}_{Ch}C)\,{}^{Ch}r_{OA} + {}^{e}_{Ch}C\,D\left({}^{Ch}r_{OA}\right) \\
= {}^{e}\omega_{e\,Ch} \times {}^{e}_{Ch}C\,{}^{Ch}r_{OA} + {}^{e}_{Ch}C\,D\left({}^{Ch}r_{OA}\right) = {}^{e}\omega_{e\,Ch} \times {}^{e}r_{OA} + {}^{e}_{Ch}C\,D\left({}^{Ch}r_{OA}\right) = \\
= {}^{e}\omega_{e\,Ch} \times {}^{e}r_{OA} + {}^{e}D_{Ch}(r_{OA})
\end{gathered}
$$

بنابراین رابطه‌ی عددی زیر بدست آمد:

$$
{}^{e}(D_e(r_{OA})) = {}^{e}D_{Ch}(r_{OA}) + {}^{e}\omega_{e\,Ch} \times {}^{e}r_{OA}
$$

به دلیل اینکه تمامی بیان‌ها در رابطه‌ی فوق در دستگاه زمینی است می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت برداری در آورد:

$$
\boxed{D_e(r_{OA}) = D_{Ch}(r_{OA}) + \omega_{e\,Ch} \times r_{OA}}
$$

با توجه به رابطه‌ی فوق توجه دارید که سرعت بردار OA از دید دستگاه چرخ با سرعت همین بردار از دید دستگاه زمین فرق دارد و در صورتی که $\omega_{e\,Ch}$ یا r_{OA} صفر باشند سرعت این بردار از این دو دستگاه یکسان است. به رابطه‌ی فوق که بسیار ساده اما پرکاربرد است *قضیه کوریولیس* می‌گوییم.

این عبارت برداری در هر دستگاهی اعم از چرخ یا زمین می‌توان بیان نمود.

حال بر اساس این قضیه، برای مثال چرخ و فلک جلسه‌ی قبل سرعت بردار OA از دید دستگاه زمین و بیان شده در دستگاه چرخ($^{Ch}(D_e(r_{OA}))$) را بدست می‌آوریم.

در آن مسأله مقادیر زیر را بدست آوردیم:

$$
{}^{Ch}r_{OA} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} {}^{Ch}\omega_{e\,Ch} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}
$$

بنابراین داریم:

$$
{}^{Ch}(D_e(r_{OA})) = {}^{Ch}D_{Ch}(r_{OA}) + {}^{Ch}\omega_{e\,Ch} \times {}^{Ch}r_{OA} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

همانطور که انتظار داشتیم این قضیه محاسبات را نسبت به محاسباتی که در جلسه‌ی پیش انجام شد بسیار کاهش داد.

اصطلاحاً به دستگاهی که آن را دستگاه چرخ نامیدیم *دستگاه قطبی*مربوط به دستگاه زمینی (دکارتی) می‌گوییم. به دستگاه g_2 که در تمرین سری سوم تعریف نمودیم دستگاه کروی دستگاه زمینی(e) می‌گوییم. در همین تمرین دستگاه e قطبی دستگاه g_1 ، دستگاه g_2 قطبی دستگاه g_1 و دستگاه g_1 قطبی دستگاه e است.

توجه داشته باشید که بدون در نظر گرفتن دستگاه دکارتی زمینی دستگاه قطبی و کروی تعریف نمی‌شوند.

مشابه مباحثی که در مورد سرعت داشتیم و از قضیه‌ی کوریولیس برای بیان رابطه‌ی سرعت از دید دستگاه‌های مختلف استفاده نمودیم می‌توانیم از این قضیه برای بیان رابطه‌ی شتاب‌ها از دید دستگاه‌های مختلف استفاده نماییم. کاملاً واضح است که وقتی سرعت‌ها از دید دستگاه‌های مختلف با یکدیگر برابر نبودند، شتاب‌ها نیز از دید دستگاه‌های مختلف با یکدیگر برابر نخواهند بود.

تکلیف) سعی کنید با استفاده از قضیه کوریولیس رابطه‌ی بین $D_e(D_e r_{OA})$ و $D_{Ch}(D_{Ch} r_{OA})$ را بدست آورید.